Apprentissage de la notion de limite: Modèles spontanés et modèles propres[1]

Bernard Cornu
Université de Grenoble I

Within the mathematical activity, mathematical notions are not only used according to their formal definition, but also through mental representations, which may differ for different people. These "individual models" are elaborated from "spontaneous models" (models which pre-exist, before the learning of the mathematics notion, and which originate for example in daily experience), interfering with the mathematical definition. In this paper, we study the spontaneous models and the elaborating of the individual models for the notion of limit among the students. We notice that the notion of limit denotes very often a bound you cannot cross over, which can or cannot be approached. It is sometimes viewed as reachable, other times as unreachable. The term "tends to" is also used with quite distinct meanings, which do not always agree with correct mathematical usage. We relate this study to the historical evolution of the concept of limit.

Modèles spontanés et modèles propres

L'activité mathématique ne se réduit pas à la mise bout à bout de propositions selon des règles logiques ; un objet mathématique n'est pas mis en jeu uniquement d'après les axiomes où les propriétés qui les caractérisent. La mathématique –professionnel ou élève- met en jeu à chaque instant des aspects très personnels de la notion mathématique qu'il manipule : il a présents à l'esprit des exemples particuliers, chaque notion déclenche en lui des images, et ce sont ces images qui font fonctionner bien souvent l'intuition. La représentation mentale que le mathématicien a d'une notion donne à cette notion son aspect dynamique, vivant. Elle permet au mathématicien de faire fonctionner la notion. Au contraire, la définition mathématique formelle est bien souvent figée ; elle reste bien sûr le recours et le garant permanent, et elle permet l'écriture et la communication. Mais à elle seule, elle ne suffit pas à déclencher l'activité mathématique. Il est intéressant d'étudier la formation de cette représentation mentale des notions mathématiques, et il est important de la prendre en compte dans l'enseignement (cf. Tall & Vinner, 1981).

En ce qui concerne la notion de limite, il se trouve que bien avant d'en avoir commencé l'étude en classe, les élèves en ont déjà une idée, provenant de la vie quotidienne:

[1] *Proccedings PME (Psychology of Mathematics Education),* Grenoble, France, 1981, pp. 322-326.

le mot « limite » s'emploie en français courant, il a un certain nombre de sens, comme nous le verrons par la suite. Ces sens sont la plupart du temps différents du sens mathématique. L'élève à qui on va enseigner la notion de limite a donc déjà en lui ce que nous appelons des *modèles spontanés*. Là dessus, le professeur va donner la définition mathématique, assortie d'exemples et de théorèmes où l'objet mathématique intervient et fonctionne. Il sera illusoire de penser que la définition mathématique va effacer toutes les conceptions antérieures de l'élève, en prendre la place pour donner lieu à un *modèle mathématique* qui désormais sera seul à intervenir dans l'activité mathématique. Bien au contraire, cette définition va entrer en conflit avec les modèles spontanés. Il va se produire des mélanges, des adaptations, pour finalement aboutir chez l'élève à des modèles engendrés à la fois par les modèles spontanés et la définition mathématique : nous les appelons *modèles propres*. Sur une même, notion, il peut y en avoir plusieurs chez un même é1ève. Ils peuvent être (et ils sont bien souvent) inexacts sur le plan mathématique. Mais, lorsque l'élève aura à résoudre des exercices ou des problèmes, il mettra en jeu ses modèles propres, et non la notion mathématique à l'état pur. Ainsi, la plupart des erreurs faites par les étudiants à propos de la notion de limite ne sont pas le fait uniquement du hasard ou de l'inattention, mais elles sont la conséquence logique de leurs modèles propres. L'étude des erreurs permet d'ailleurs de retrouver les modèles propres des étudiants (cf. les travaux de Aline ROBERT sur la convergence des suites). Par rapport à la notion mathématique, les modèles propres ne sont ni totalement **faux,** ni totalement **justes.** La plupart du temps, ils sont issus d'exemples, et ils peuvent donc être opérants sur certains exemples et sur certains types d'exercices. Les exercices qu'un étudiant rencontre lors de sa scolarité sont assez semblables les uns aux autres, et on voit souvent des étudiants réussir leurs études sans trop de difficultés avec des modèles propres mathématiquement faux, car ces modèles propres ont été suffisants pour le champ couvert par les exercices rencontrés. C'est en prenant des exercices inhabituels, allant à contresens des schémas classiques, qu'on arrive à repérer les inadéquations de certains modèles propres. Les modèles propres ont aussi un caractère évolutif : Au fur et à mesure qu'on les utilise, ils s'affinent, se précisent, se corrigent. Mais ils peuvent rester éloignés du Modèle mathématique fort longtemps.

LA NOTION DE LIMITE

Nous avons cherché, au moyen de différents tests (cf. Cornu, 1980), à déceler la signification du mot "limite" et de l'expression "tend vers" chez des élèves, juste avant qu'ils reçoivent un enseignement sur la limite, en classe de seconde. Les mêmes tests ont été proposés ensuite à des étudiants de différents niveaux, de façon à voir l'évolution des réponses selon l'avancement des études. De ces tests, nous avons tiré un certain nombre de renseignements sûr les modèles spontanés.

En ce qui concerne l'expression "tend vers", on observe d'abord qu'elle ne fait pas vraiment partie du vocabulaire usuel des élèves de seconde. Ils ont du mal à donner des exemples de phrases comportant cette expression. Bien souvent, l'expression "tend vers" remplace "avoir tendance à"; elle peut ne pas contenir d'idée de variation effective : "Ce bleu tend vers le violet" ou au contraire traduire une évolution : "Ce régime politique tend vers le socialisme". Dans un contexte mathématique, on a pu distinguer quatre modèles dans l'esprit des élèves :

Modèle a: tend vers = se rapproche de (éventuellement en restant éloigné). Ainsi, si une grandeur augmente par exemple de 1 à 3, on peut dire qu'elle tend vers 10.

Modèle b: tend vers = se rapproche de ... jusqu'à l'atteindre. Par exemple, si x augmente de 1 à 3, alors $1 + x$ tend vers 4. Il peut y avoir évolution avec le temps: dès qu'on a atteint la valeur désignée, "çà ne tend plus" !

Modèle c: tend vers = se rapproche de..... sans jamais l'atteindre Par exemple, $1/x$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

Les modèles a, b, c contiennent la notion de variation: pour qu'une grandeur tende vers un nombre, elle doit varier. Une fonction constante ne peut pas tendre vers quelque chose.

Modèle d: tend vers = "a tendance à ressembler à", "est voisin de". Par exemple: 2,8 tend vers 3.

Le mot « limite » est évidemment plus habituel dans le langage quotidien des élèves. Il désigne presque toujours quelque chose de statique, de fixe -limite géographique, limite à ne pas dépasser (morale ou réglementaire), borne que l'on s'interdit de franchir "les limites de la condition humaine...". Là apparaît la notion de difficulté à atteindre la limite, et donc la notion de "se rapprocher indéfiniment". Parfois, la limite est ce qui sépare deux choses: la limite entre un champ de blé et un champ de maïs; le nombre *0* est la limite entre le positif et le négatif. Mais le plus souvent, la limite est la fin: il n'y a rien de l'autre côté. Les modèles principaux sont les suivants:

Modèle α: Une limite est infranchissable, c'est une borne

Modèle β*:* Le modèle qu'ont certains élèves coïncide avec la notion de borne supérieure ou de borne inférieure.

Modèle γ : La limite peut être atteinte.

Modèle δ : La limite est impossible à atteindre.

Le caractère infranchissable de la limite est prédominant. Cela aura des conséquences dans l'activité mathématique. On notera que pour beaucoup, la notion de limite ne contient aucune, idée de variation, de mouvement, de rapprochement de cette limite.

En généra1, "limite" et "tend vers" ne s'emploient pas dans le même contexte. La limite désigne quelque chose de précis, alors que l'on peut tendre vers quelque chose de plus vague. Un exemple : on dira que la suite 0,9 0,99 0,999 0,9999, ... "a pour limite 1" ou "tend vers 0,9999…". Ou encore, que la suite *1 - 1/n* "a pour limite 1", mais que la suite n^2 "tend vers l'infini". Pour certains élèves, une suite illimitée n'a pas de limite... puisqu'elle est illimitée. On constate que quelques étudiants réservent le mot "limite" aux suites dont la limite est atteinte, et emploient l'expression "tend vers" pour les suites dont la limite n'est pas atteinte.

Il est intéressant de constater que les modèles identifiés chez des élèves de seconde se retrouvent dans les modèles propres des étudiants de tous les niveaux. Les tests que nous avons fait passer nous ont montré que même chez des étudiants très avancés, la notion mathématique n'a pas pris la place des modèles spontanés. Leurs modèles propres sont extrêmement marqués par la conception initiale.

LA LIMITE ET SON HISTOIRE

Avant d'arriver à la notion de limite que nous connaissons tous maintenant, les mathématiciens ont eu beaucoup de mal à préciser cette notion. L'étude de l'histoire de la notion de limite permet de voir que la plupart des modèles que nous avons rencontrés chez les élèves ont existé et ont joué un rôle dans l'évolution de la notion de limite. On employait encore au siècle dernier le mot "limite" pour désigner les bornes d'un intervalle; le débat pour voir si la limite peut être atteinte ou non, si l'on peut se rapprocher indéfiniment d'un point sans le toucher, a été au cœur de la construction de l'analyse, en particulier du calcul différentiel, au XVIII^{e} siècle. Les façons d'opérer des grands mathématiciens d'alors apportent un éclairage intéressant pour la compréhension des modèles qu'ont les étudiants aujourd'hui. L'évolution historique permet aussi de situer les réelles difficultés de notion de limite, et de comprendre que la définition mathématique ne suffit pas à effacer toutes les difficultés de la notion de limite, et de comprendre que la définition mathématique ne suffit pas à effacer toutes les difficultés.

REFERENCES

Tall & Vinner, 1981: Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12(1981), 151-169.

Cornu, 1980: Interférence des modèles spontanés dans l'apprentissage de la notion de limite. Séminaire de Recherche Pédagogique N° 8, laboratoire de Mathématiques appliquées et Informatique, Université de Grenoble I.